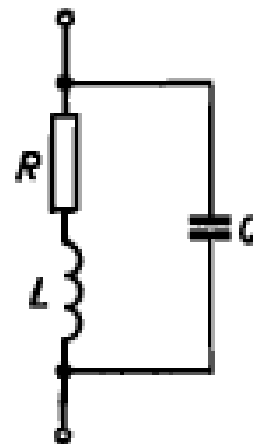


VJEŽBA 7

1. Koliko iznosi vremenska konstanta žičanog otpornika od 500Ω i fazni pomak između njegovog napona i struje, ako je frekvencija 1kHz , njegov sopstveni induktivitet 2mH i sopstveni kapacitet 5nF .

Impedansa Z je jednaka:

$$Z = \frac{(R + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R + j\omega L}{j\omega C} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC - j\omega CR} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} = \frac{R + j\omega L - \omega^2 RLC - j\omega^3 L^2 C - j\omega CR^2 + \omega^2 CLR}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} = R \frac{1 + j\omega \left[\frac{L}{R}(1 - \omega^2 LC) - RC \right]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}$$



Fazni pomak je:

$$\varphi \approx \text{tg} \varphi = \frac{\text{Im}\{Z\}}{\text{Re}\{Z\}} = \frac{R \frac{\omega \left[\frac{L}{R}(1 - \omega^2 LC) - RC \right]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}{R \frac{1}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} = \omega \left[\frac{L}{R}(1 - \omega^2 LC) - RC \right] = \omega \tau$$

$$\rightarrow \tau = \left[\frac{L}{R}(1 - \omega^2 LC) - RC \right] \text{ vremenska konstanta otpornika}$$

$$\begin{aligned} \tau &= \left[\frac{2 \cdot 10^{-3} \text{H}}{500 \Omega} (1 - (2\pi 1000 \text{Hz})^2 * 2 \cdot 10^{-3} \text{H} * 5 \cdot 10^{-9} \text{F}) - 500 \Omega * 5 \cdot 10^{-9} \text{F} \right] \\ &= \left[\frac{2 \cdot 10^{-3} \text{H}}{500 \Omega} (1 - (2 * 3.14 * 1000 \frac{1}{\text{s}})^2 10^{-11} \text{HF}) - 25 \cdot 10^{-7} \Omega \text{F} \right] \\ &= \left[\frac{2 \cdot 10^{-3} \text{H}}{500 \Omega} (1 - (6280)^2 10^{-11} \frac{\text{HF}}{\text{s}^2}) - 25 \cdot 10^{-7} \Omega \text{F} \right] = \left[\frac{2 \cdot 10^{-3} \text{H}}{500 \Omega} (1 - 0.000394384 \frac{\text{HF}}{\text{s}^2}) - 25 \cdot 10^{-7} \Omega \text{F} \right] \\ &= \left[\frac{2 \cdot 10^{-3} \text{H}}{500 \Omega} (0.9996 \frac{\text{HF}}{\text{s}^2}) - 25 \cdot 10^{-7} \Omega \text{F} \right] = 0.000003984 \frac{\text{H}^2 \text{F}}{\Omega \text{s}^2} - 0.0000025 \Omega \text{F} = \\ &= 0.000003984 \frac{\left(\frac{\text{kg} * \text{m}^2}{\text{s}^2 * \text{A}^2} \right)^2 \frac{\text{A}^2 * \text{s}^4}{\text{kg} * \text{m}^2}}{\frac{\text{kg} * \text{m}^2}{\text{s}^3 * \text{A}^2} \text{s}^2} - 0.0000025 \frac{\text{kg} * \text{m}^2}{\text{s}^3 * \text{A}^2} \frac{\text{A}^2 * \text{s}^4}{\text{kg} * \text{m}^2} = 0.00000148 \text{s} = 1.5 \mu\text{s} \end{aligned}$$

$$\text{Fazni pomak je sada } \varphi \approx \text{tg} \varphi = 2\pi 1000 \text{Hz} * 1.5 \mu\text{s} = 2 * 180^\circ * 1000 \frac{1}{\text{s}} * 1.5 * 10^{-6} \text{s} = 0.54^\circ$$

2. Za mjerenje otpornosti, na raspolaganju je naponska veza data na slici. Unutrašnja otpornost ampermetra je 12Ω . Unutrašnja otpornost voltmetra je $100 \text{ k}\Omega$. Napajanje u kolu je 10 V . Potrebno je izvesti izraz za otpornost, ako su poznata očitavanja na voltmetru i na ampermetru. Potrebno je odrediti i kolika su pokazivanja instrumenata, ako se mjere nepoznate otpornosti 57Ω i $133 \text{ k}\Omega$? Kolike su mjerene vrijednosti za ova dva otpornika?

Ekvivalentna paralelna otpornost otpornika R_x koji se mjeri i otpornika voltmetra R_v je:

$$R_e = \frac{R_x R_v}{R_x + R_v}$$

Napon koji mjeri voltmetar prema Ohmovom zakonu moguće je izračunati kao:

$$R_e = \frac{U}{I}$$

Izjednačavanje prethodna 2 izraza dobija se izraz za R_x

$$\frac{U}{I} = \frac{R_x R_v}{R_x + R_v} \rightarrow R_x R_v I = U(R_x + R_v) \rightarrow R_x R_v I - U R_x = U R_v \rightarrow R_x = \frac{U R_v}{R_v I - U}$$

a struja iz prethodnog izraza je $I = \frac{U(R_x + R_v)}{R_x R_v}$ (1)

Da bi se odredila pokazivanja instrumenata potrebno je izvesti izraze za struju i napon na osnovu sljedećih jednakosti:

$$E = U + I R_A \rightarrow I = \frac{E - U}{R_A} \quad (2)$$

(1)=(2)

$$\frac{U(R_x + R_v)}{R_x R_v} = \frac{E - U}{R_A} \rightarrow \frac{U}{R_x} + \frac{U}{R_v} = \frac{E - U}{R_A} \rightarrow U = \frac{E}{R_A \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_A} \right)} \quad (3)$$

$$(3) \text{ u } (2) \quad I = \frac{E - \frac{E}{R_A \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_A} \right)}}{R_A} = \frac{E}{R_A} \left(1 - \frac{1}{R_A \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_v} + \frac{1}{R_A} \right)} \right)$$

Za $R_x = 57\Omega$ dobijamo da je $I = 0.14 \text{ A}$, a $U = 8.26 \text{ V}$ a $R_{xmjereno} = \frac{U}{I} = \frac{8.26 \text{ V}}{0.14 \text{ A}} = 59\Omega$

Za $R_x = 133 \text{ k}\Omega$ dobijamo da je $I = 0.18 \text{ mA}$, a $U = 9.998 \text{ V}$ $R_{xmjereno} = \frac{U}{I} = \frac{9.998 \text{ V}}{0.18 * 10^{-3} \text{ A}} = 55.54 \text{ k}\Omega$

Iz rješenja ovog zadatka očigledno je da naponska veza služi za mjerenje relativno malih otpornosti, jer je absolutna greška koja se dobija za merenje relativno velike otpornosti veća.

